# 经济类《线性代数》的教学体会

林亚南

厦门大学数学科学学院

2011年4月23日

访问主页
标题页
第 1 页 共 40 页
返回
全屏显示
关闭
退出

卢刚主编的《线性代数（第二版）》内容编排: $1矩阵,$2线性方程组, $3矩阵的特征值与特征向量,$4二次型. $5线性空间与线性变换

教材特点:

1. 突出应用和背景,概念有引例,每章有应用;

2. 行列式放在矩阵作为一节,用归纳法定义,性质没有证明,介绍Laplace定理;

3. 突出初等变换;

4. 线性方程组包含向量,线性相关性,秩,线性方程组的解的结构,还有标准正交基和Schimidt正交化;

5. 线性空间与线性变换观点高;

6. 特征值和特征向量一章中出现矩阵级数,还有应用的建模和例子.

教学对象：金融系二年级第一学期学生190人，其中高考文科考生40人

教学讲义：http://gdjpkc.xmu.edu.cn ”教学论坛”栏目

线性代数方法选讲：http://gdjpkc.xmu.edu.cn ”教学论坛”栏目

## 关于教学内容和教学要求

代数学研究代数系统的结构理论和表示理论.

高等代数和线性代数的差别和关系.

1. 突出线性方程组为主线, 矩阵为研究主体

2. 突出工具功能, 加强计算套路的思想和方法, 知其所以然, 不要求太多的计算技巧

3. 突出代数学的思想, 加强理解内容的有机联系

4. 面向应用, 满足非数学专业的需要

5. 利用新的计算技术

6. 根据学生的水平和需要

## $1矩阵

第一次课（两个课时）：

数域;

线性方程组的消元法, 有唯一解, 无解, 有无穷多解

矩阵, 系数矩阵, 增广矩阵, 矩阵的行初等变换

问题1: 对于一般的线性方程, 能否判断解的存在性, 唯一性; 当无穷多解时解的关系?

举例二阶的Cramer法则.

问题2: 对于一般$n$元$n$个方程的方程组, 是否有一般的公式解?

## 1.1 矩阵的概念

## 1.2 矩阵的运算

矩阵定义的引进, 运算律和证明

**例** $$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ 称为$n$维标准列向量; $\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \cdots, \varepsilon_n^T$称为$n$维标准行向量. 求证:

(1) $\varepsilon_i^T \varepsilon_j = \delta_{ij}$, 其中$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$;

(2) $A_{m\times n}\varepsilon_i$是$A$的第$i$列, $\varepsilon_i^T A_{m\times n}$是$A$的第$i$行;

(3) $\varepsilon_i^T A_{m\times n}\varepsilon_j = a_{ij}$.

访问主页
标题页
第 7 页 共 40 页
返回
全屏显示
关闭
退出

**例** $m$维标准单位列向量$\varepsilon_i$和$n$维单位行向量$\varepsilon_j^T$的乘积$\varepsilon_i\varepsilon_j^T$称为$m \times n$阶基础矩阵, 记为$E_{ij}$. 基础矩阵$E_{ij}$的第$(i, j)$分量是$1$, 其它分量都是$0$. 求证:

(1) $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$;

(2) 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$;

(3) $E_{ij}A$将$A$第$j$行变为第$i$行, 其余元素为0; $AE_{ij}$将$A$第$i$列变为第$j$列, 其余元素为$0$;

(4) $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$.

## 1.3 方阵的行列式

行列式的定义(对阶数做归纳)

行列式的性质

**定理1** 行列式和它的转置行列式相等.

**定理2** 行列式的两行(两列)互换, 行列式改变符号.

**定理3** 行列式的某行(列)的公因子可提到行列式的外面,或若以一个数乘行列式等于用该数乘以行列式的任意一行(列).

**定理4** 若行列式的某一行(列) 的元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式之和.

**定理5** 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.


访问主页
标题页
第 9 页 共 40 页
返回
全屏显示
关闭
退出

**定理6** 设$A$ 是$n$ 阶行列式, 则有

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}\det A & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}\det A & l=j\\ 0 & l\neq j\end{cases}$$

其中$A_{ij}$ 是$a_{ij}$ 的代数余子式.

## 行列式的计算

**例** 计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & & \\ a_{n1} & & & & & \end{vmatrix}.$$

例

(1) 设$A$为3阶方阵, $|A|=-2$, 计算$|A^2|$, $|2A|$和$|-A|$.

(2) 设$\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$是四维向量, 已知$|A|=|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|=5$, $|B|=|\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|=2$, 求$|A+B|$的值.

(3) 设$A$为三阶方阵, $A^*$为伴随矩阵, $|A|=\frac{1}{8}$, 计算$|(\frac{1}{3}A)^{-1}-8A^*|$.

**定义** 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$. 定义$\det A$ 为

$$\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n},$$

这里$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 取遍$1,2,\cdots,n$ 的所有全排列.

**Laplace定理**

**定理** $\det(AB)=\det A\det B$.

## 1.4 矩阵的方块

**例** 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times s}$. 记

$$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{m\times 1},\quad B=(B_1,B_2,\cdots,B_s).$$

其中$A_i$ 是$m$ 维列向量, $1\le i\le n$, $\alpha_s$ 是$n$ 维行向量, $1\le s\le m$, $B_j$ 是$n$ 维列向量. 又设

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_{n\times 1},\quad \beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}_{m\times 1}.$$

则$AB$ 可表为

$$AB = A(B_1, B_2, \cdots, B_s) = (AB_1, AB_2, \cdots, AB_s).$$

所以, 若$AB = 0$, 则$B_i$ 是$Ax = 0$ 的解. 若$B \neq 0$, 则$Ax = 0$ 有非零解.

$AB$ 还可表为

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \alpha_2 B \\ \vdots \\ \alpha_n B \end{pmatrix}.$$

$Ax=\beta$ 可以表示为

$$(A_1, A_2, \cdots, A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta,$$

或

$$\beta = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n.$$

## 1.5 可逆矩阵

定义, 唯一性, 性质

伴随矩阵　$AA^* = A^*A = E$

矩阵可逆的充要条件是行列式非零.

## 1.6 矩阵的初等变换

初等矩阵和初等变换

左行右列定理

记$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\cdots\\A_m\end{pmatrix}$, 其中$A_i=(a_{i1},a_{i2},\vdots,a_{in})$. 初等矩阵的分块形式为

$$P(ij)=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\\vdots\\\varepsilon_j^T\\\vdots\\\varepsilon_i^T\\\vdots\\\varepsilon_m\end{pmatrix},P(i(c))=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\\vdots\\c\varepsilon_i^T\\\vdots\\\varepsilon_m\end{pmatrix},P(i,j(c))=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\\vdots\\\varepsilon_i^T+c\varepsilon_j^T\\\vdots\\\varepsilon_j^T\\\vdots\\\varepsilon_m\end{pmatrix}$$

由分块矩阵乘法知

$$P(ij)A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_m A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

$$P(i(c))A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ c\varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T A \\ \vdots \\ c\varepsilon_i^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_m A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

$$P(i,j(c))A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T + c\varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + cA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

## 矩阵的相抵

相抵标准型

补充等价关系和等价分类思想

**推论** 设$A$是$n$阶方阵, 则下列命题等价:

(1) $A$可逆;

(2) 存在$B$, 使得$AB = E_n$;

(3) 存在$B$, 使得$BA = E_n$;

(4) $|A| \neq 0$;

(5) $A \cong E_n$;

(6) $A$可表示为若干个初等矩阵之积.

初等变换求逆, 2阶方块矩阵的求逆

## 1.7 矩阵的秩

用非零子式的最大阶数定义

**定理** $r(A) = r(A^T)$.

**定理** 阶梯形矩阵的秩等于非零行数.

**定理** 任意矩阵可经过行的初等变换化为梯形矩阵.

**定理** 初等变换不改变矩阵的秩.

## 推论

(1) 设$P, Q$是可逆阵, 则$r(PA) = r(AQ) = r(PAQ) = r(A)$.

(2) 设$A$相抵于$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$r(A) = r$.

(3) 设$A, B$是$m \times n$矩阵, 则$A$相抵于$B$的充分必要条件是$r(A) = r(B)$, 充分必要条件是$A, B$的相抵标准型是相同的.

(4) 设$A$是$n$阶方阵, 则$A$可逆的充分必要条件是$r(A) = n$.

## 1.8 矩阵应用的两个例子:

图论的邻接矩阵

转移概率的转移矩阵

## $2线性方程组

## 2.1 线性方程组

Cramer法则

消元法

非齐次线性方程组有解的判定定理. 证明过程是解题过程. 化成梯形, 决定解的存在和唯一性; 有解的情况下,继续化为简化梯形. 自由未知量. 特别注意合适做列的互换以及处理.

齐次线性方程组有解的判定定理

## 2.2 向量及线性运算

向量的相等, 加法, 数乘, 线性空间的定义. $R^n$, 子空间, 解空间

访问主页
标题页
第 28 页 共 40 页
返回
全屏显示
关闭
退出

## 2.3 向量间的线性关系

线性组合, 线性表示

可线性表示的充要条件是对应线性方程组有解

线性相关与线性无关

用方程组判定定理

**定理** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关充分必要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

**定理** 设$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_s\alpha_s$, 则表示法唯一的充分必要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

**定理** 部分相关, 则整体相关.

**定理** 向量组无关, 则增加分量后也无关.

## 2.4 向量组的秩

### 极大线性无关组

### 向量组的等价

**定理** 如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 且$s > t$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 必线性相关.

向量组的秩

**定理** 行的初等变换不改变矩阵的行秩和列秩

**定理** 任一$m \times n$ 矩阵$A$ 的行秩等于列秩, 等于$r(A)$.

**例** 一个矩阵添加一行(或一列), 秩不变或加1.

**例** 设$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 求证: $r(C)=r(A)+r(B)$.

**例** $r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$.

**例** 设$A$ 是$n$ 阶方阵, 则$A^2 = A$ 的充分必要条件是$r(A)+r(E-A)=n$.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & E-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} A^2-A & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A^2-A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

## 2.5 线性方程组解的结构

$Ax=0$ 的解全体构成$F^n$ 的一个子空间.

对于$n$ 元线性方程组$Ax=0$, 如果$r(A)=r<n$, 则该方程组必有基础解系, 且基础解系由$n-r$ 个向量组成.

设$A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$ 满足$AB=0$, 则$r(A)+r(B)\le n$.

设$A_{m\times n}$ 是实矩阵. 求证: $r(A^TA)=r(A)=r(AA^T)$.

$r(A^*)$

非齐次线性方程组的解的结构

## 2.6 $R^n$的标准正交基

## $3 矩阵的特征值与特征向量

## $4 二次型

## $5 线性空间与线性变换

线性代数大纲小组(LACSG)对线性代数第一门课大纲的建议

1. 矩阵的加法和乘法(3课时)
2. 线性方程组(4课时)
3. 行列式(2-3课时)
4. $\mathbb{R}^n$的性质(7-8课时)
5. 特征值与特征向量(6课时)
6. 正交性的进一步讨论(4课时)

总计26-28课时

谢 谢！